Основы теории управления

Лекция 4

Тест для допуска к лабораторной работе №2. Темы:

- Принципы управления.
- Математическое описание САУ.
- Типовые воздействия.
- Динамические характеристики.
- Передаточная функция.

План лекции

- Стандартная форма записи передаточной функции;
- Реакция систем на типовые воздействия;
- Частотные характеристики САУ;
- Типовые динамические звенья.

Передаточная функция

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \ldots + a_2 \dot{y} + a_1 y = b_m u^{(m)} + \ldots + b_0 u$$

$$y(t) \xrightarrow{L} Y(p), \qquad u(t) \xrightarrow{L} U(p)$$

$$p^n Y(p) + a_n p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_2 p Y(p) + a_1 Y(p) =$$

$$= b_m p^m U(p) + \ldots + b_1 p U(p) + b_0 U(p)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_m p^m + \ldots + b_1 p + b_0}{p^n + a_n p^{n-1} + \ldots + a_2 p + a_1}$$

Стандартная форма передаточной функции

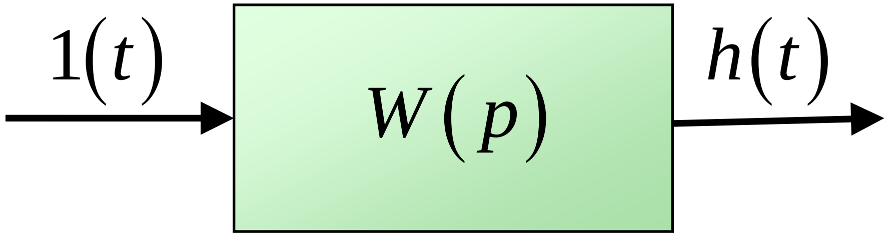
$$W(p)=k\frac{d_m p^m+\ldots+d_1 p+1}{c_n p^n+c_{n-1}p^{n-1}+\ldots+c_1 p+1},$$

$k=b_0/a_1$ – **коэффициент усиления;**

$$c_j=\begin{cases} a_{j+1}/a_1, & j=1,2,\ldots,n-1, \\ 1/a_1, & j=n; \end{cases}$$

$$d_i=b_i/b_0,\quad i=1,2,\ldots,m.$$

Переходная функция



$$1(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{p} \qquad h(t) \xrightarrow{L} H(p) = ?$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \Rightarrow Y(p) = W(p)U(p)$$

$$H(p) = W(p)\frac{1}{p}$$

$$W(p) = pH(p)$$

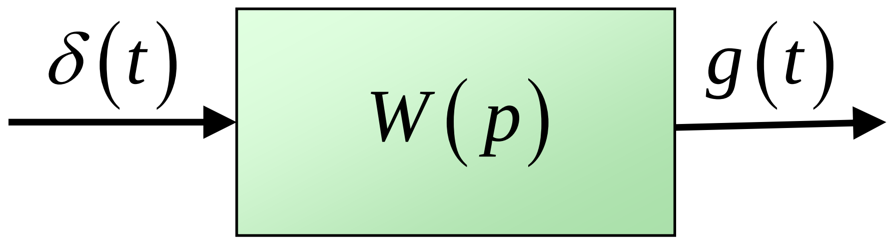
Переходная функция

$$W(p) = pH(p)$$

$$Y(p) = W(p)U(p) = pH(p)U(p) = H(p)\cdot\left[pU(p)\right]$$

$$y(t) = \int_0^t h(t-\tau)\dot{u}(\tau)\,d\tau$$

Импульсная переходная функция



$$\delta(t) \xrightarrow{L} 1 \qquad g(t) \xrightarrow{L} G(p) = ?$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} \Rightarrow Y(p) = W(p)U(p)$$

$$G(p) = W(p)$$

$$W(p) = G(p)$$

Импульсная переходная функция

$$W(p) = G(p)$$

$$Y(p) = W(p)U(p) = G(p)U(p)$$

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Взаимосвязь переходной функции и импульсной переходной функции

$$W(p) = pH(p) = G(p)$$

$$G(p) = pH(p)$$

$$g(t) = \dot{h}(t) \qquad h(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau$$

Частотные характеристики

Определяют взаимосвязь между параметрами периодических сигналов на входе и выходе объекта управления

$$u(t) = A_u \cos \omega t \longrightarrow \boxed{x(t)} \longrightarrow y(t) = A_y \cos\left(\omega t + \varphi_y\right)$$

Обобщенная частотная характеристика:

$$W(j\omega) = k\frac{d_m(j\omega)^m + \ldots + d_1(j\omega) + 1}{c_n(j\omega)^n + c_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + c_1(j\omega) + 1}.$$

Частотные характеристики

$$W(j\omega) = R(\omega) + jI(\omega),$$

$R(\omega)$ **– вещественная частотная характеристика (ВЧХ);**

$I(\omega)$ **– мнимая частотная характеристика (МЧХ).**

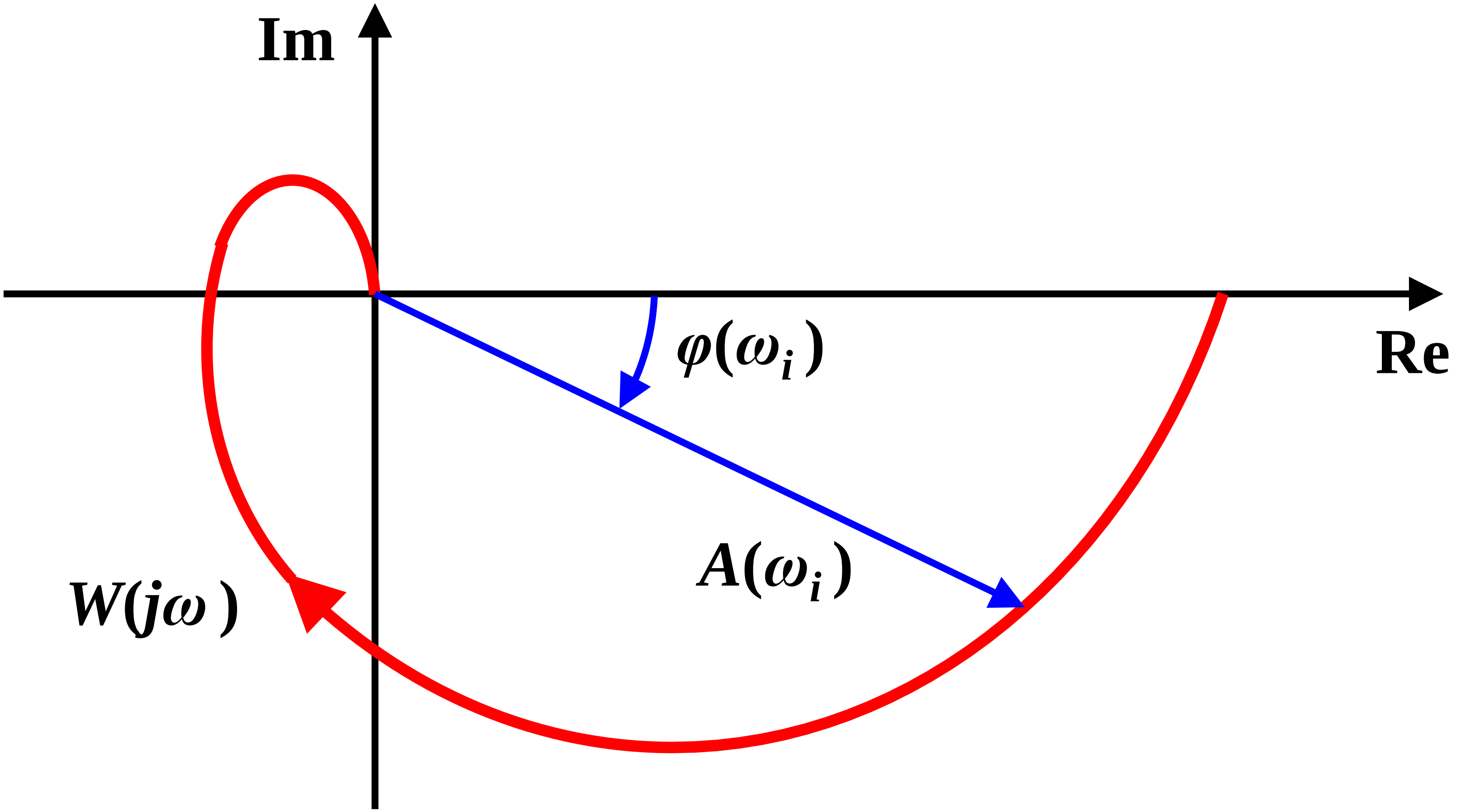
$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$A(\omega)$ **– амплитудная частотная характеристика (АЧХ);**

$\varphi(\omega)$ **– фазовая частотная характеристика (ФЧХ).**

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} \qquad tg[\,\varphi(\omega)\,] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)}$$

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)



Логарифмические частотные характеристики

АЧХ и ФЧХ удобно строить в логарифмических координатах:

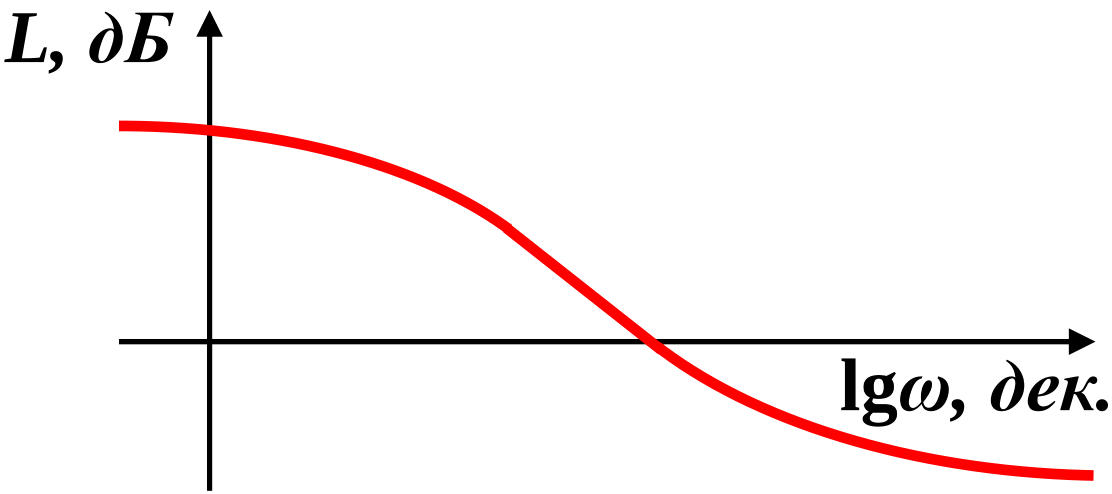
- в логарифмическом масштабе резко уменьшается кривизна характеристик, что позволяет в большинстве практических случаев приближенно изображать АЧХ ломанными линиями.
- в логарифмическом масштабе АЧХ цепочки звеньев равна сумме АЧХ отдельных звеньев:

$$\lg A = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

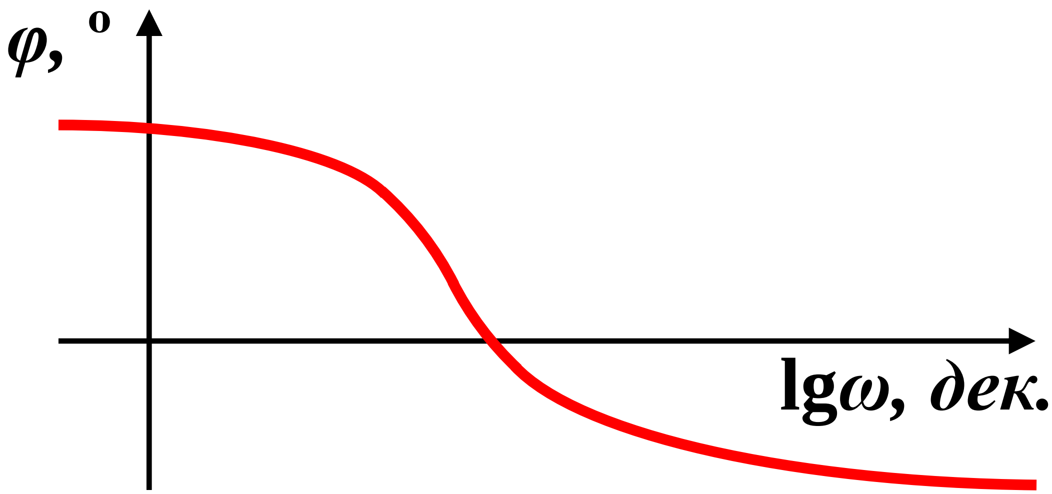
Логарифмические частотные характеристики

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega)$$

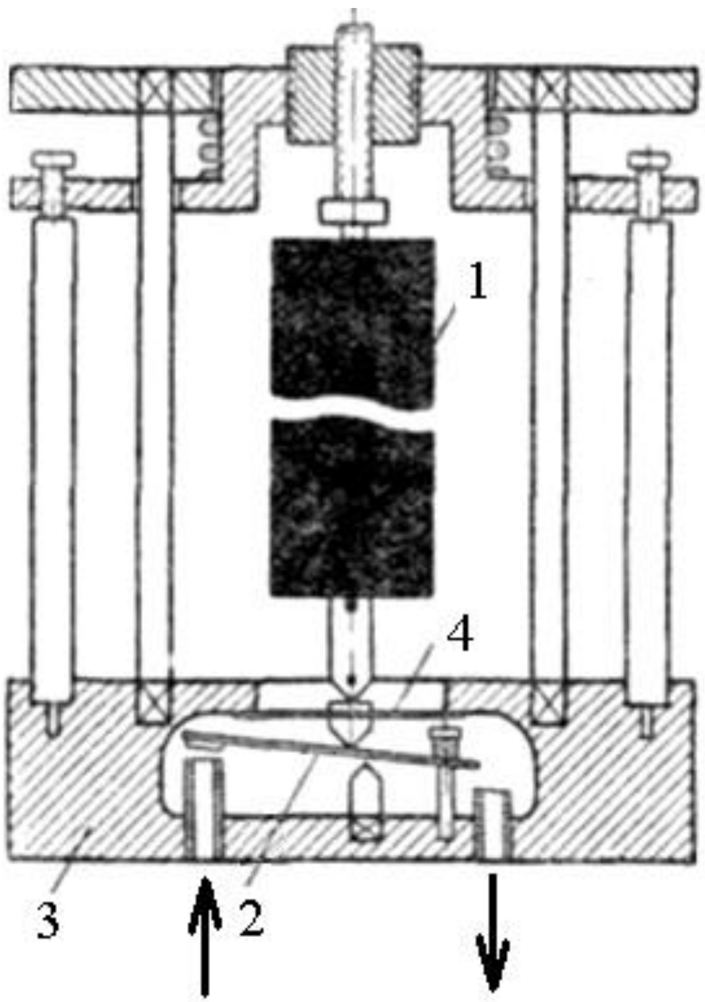


Логарифмическая фазовая частотная характеристика



Задача: маяк должен работать только в темное время суток

Солнечный клапан



Конструкция клапана предусматривает компенсацию изменений длины затемненного цилиндра от внешней температуры – управление по возмущению.

Густав Дален,
1907 г., Швеция,

лауреат Нобелевской премии по физике в 1912 г. «за изобретение автоматических регуляторов, используемых в сочетании с газовыми аккумуляторами для источников света на маяках и буях».

Типовые динамические звенья

- Усилительное звено;
- Дифференцирующее звено;
- Интегрирующее звено;
- Апериодическое звено;
- Звено второго порядка.

Исследование типовых звеньев

- Математическое описание, передаточная функция.
- Переходная характеристика (реакция на единичную ступенчатую функцию).
- Импульсная переходная характеристика (реакция на импульсную дельта-функцию).
- Частотные характеристики (реакция на гармонический сигнал при изменении частоты от 0 до бесконечности).

Пропорциональное (усилительное) звено

$y = k u,$ k – коэффициент усиления

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{kU(p)}{U(p)} = k$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p}$$

$$h(t) = k \cdot 1(t)$$

$$G(p) = W(p) = k$$

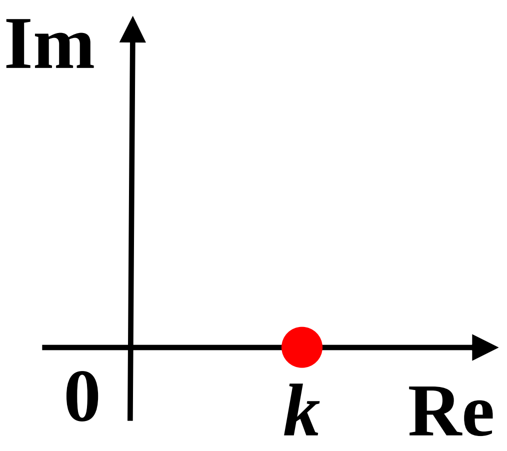
$$g(t) = k \cdot \delta(t)$$

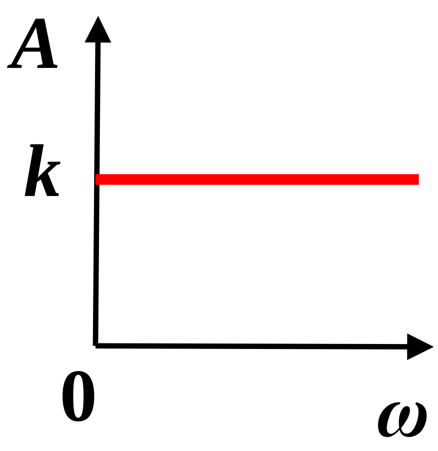
Частотные характеристики пропорционального звена

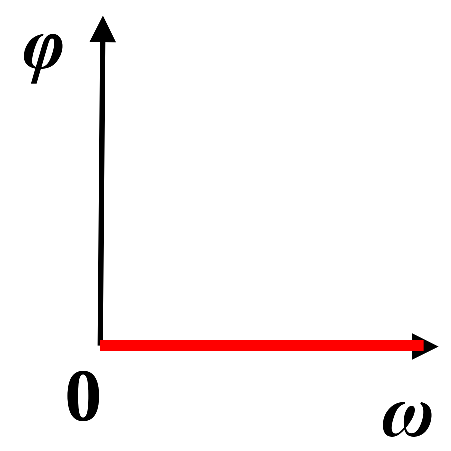
$$W(j\omega)=k \qquad R(\omega)=k \qquad I(\omega)=0$$

$$A(\omega)=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)}=\sqrt{k^2+0}=k$$

$$tg[\varphi(\omega)]=\frac{I(\omega)}{R(\omega)}=\frac{0}{k}=0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega)=0$$







Дифференцирующее звено

$$y = k\dot{u}$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{kpU(p)}{U(p)} = kp$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{kp}{p} = k \qquad h(t) = k \cdot \delta(t)$$

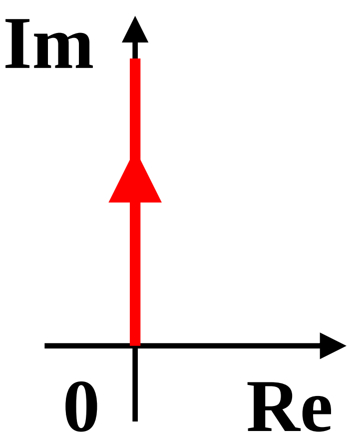
$$G(p) = W(p) = kp \qquad g(t) = k \cdot \delta'(t)$$

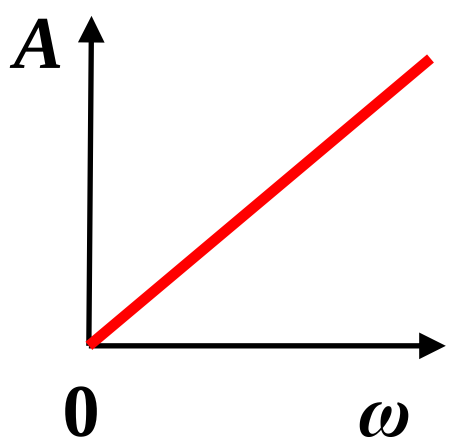
Частотные характеристики дифференцирующего звена

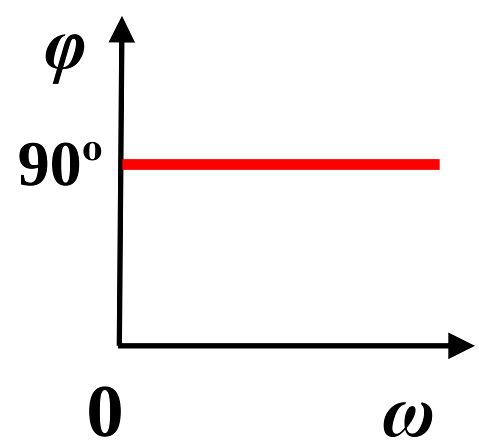
$$W(j\omega)=jk\omega \qquad R(\omega)=0 \qquad I(\omega)=k\omega$$

$$A(\omega)=\sqrt{R^2(\omega)+I^2(\omega)}=\sqrt{0+(k\omega)^2}=k\omega$$

$$tg[\varphi(\omega)]=\frac{I(\omega)}{R(\omega)}=\frac{k\omega}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad \varphi(\omega)=90^\circ$$

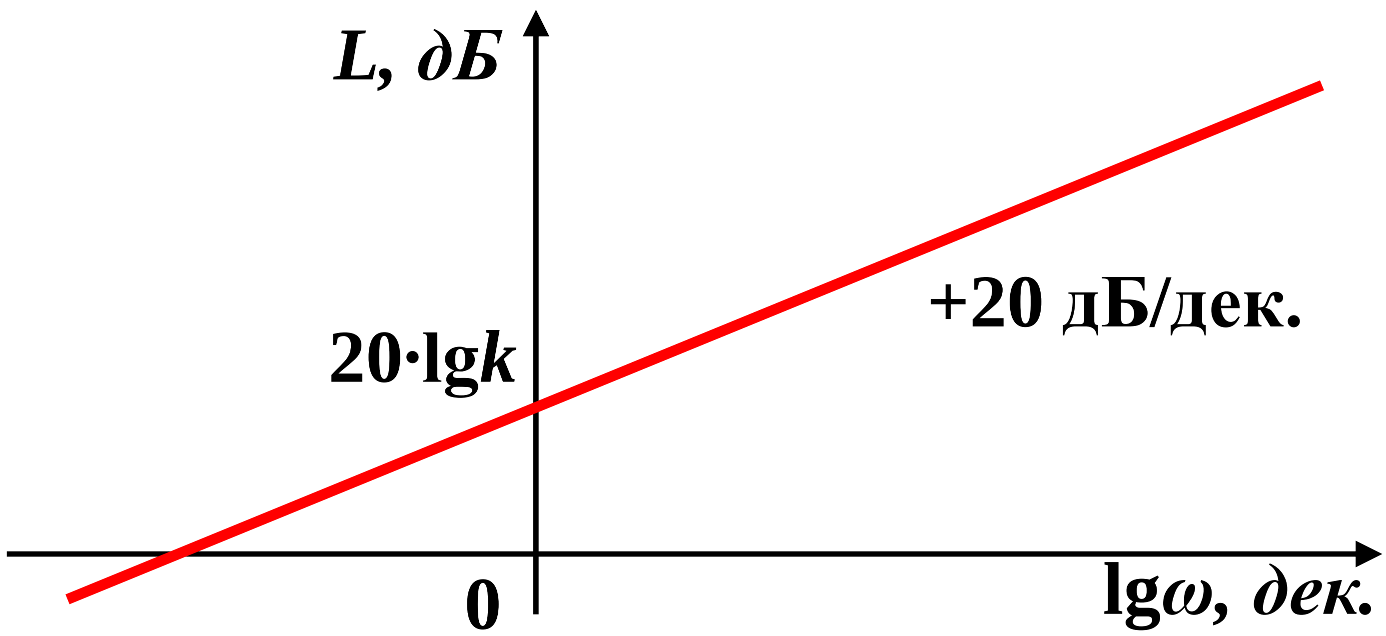






ЛАЧХ дифференцирующего звена

$$L(\omega) = 20\lg k\omega = 20\lg k + 20\lg \omega$$



Интегрирующее звено

$$\dot{y} = k\,u \qquad y(t) = k\int_0^t u(t)dt + y(0)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{\frac{k}{p}U(p)}{U(p)} = \frac{k}{p}$$

$$H(p) = \frac{W(p)}{p} = \frac{k}{p^2} \qquad h(t) = k\,t$$

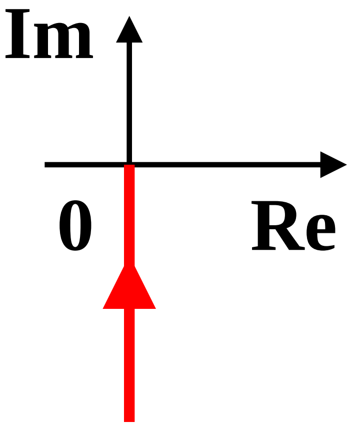
$$G(p) = W(p) = \frac{k}{p} \qquad g(t) = k \cdot 1(t)$$

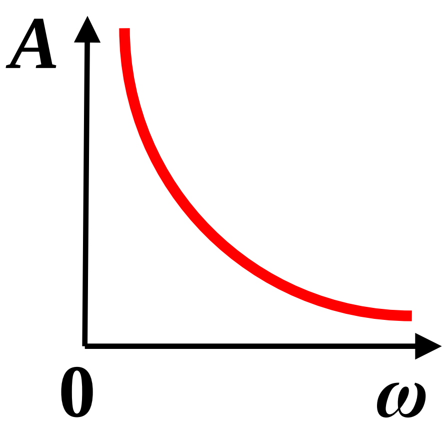
Частотные характеристики интегрирующего звена

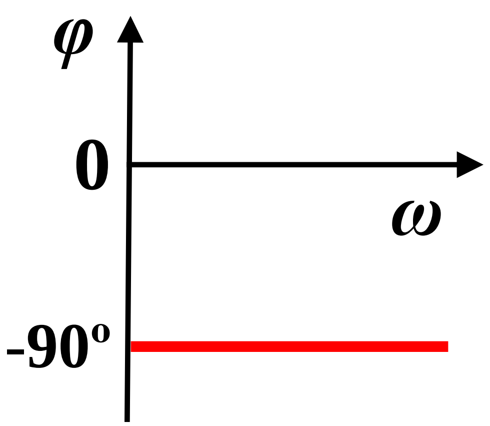
$$W(j\omega) = k/j\omega = -jk/\omega \qquad R(\omega) = 0 \qquad I(\omega) = -k/\omega$$

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \sqrt{0 + (-k/\omega)^2} = k/\omega$$

$$tg[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = \frac{-k}{\omega \cdot 0} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \varphi(\omega) = -90^\circ$$

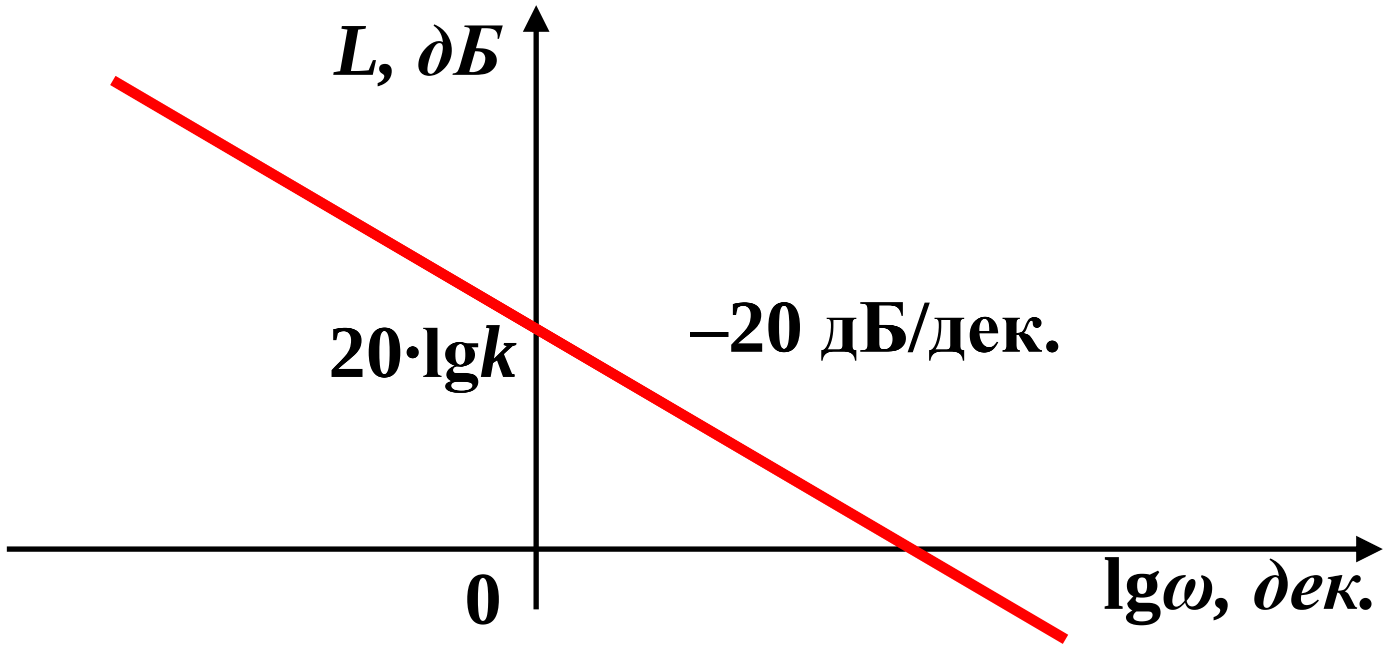






ЛАЧХ интегрирующего звена

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\omega} = 20\lg k - 20\lg\omega$$



Апериодическое звено

$$\dot{y} + a_0 y = bu \qquad T\dot{y} + y = ku$$

$T = 1/a_0$ – постоянная времени

$k = b/a_0$ – коэффициент усиления

$$TpY(p) + Y(p) = kU(p)$$

$$Y(p) \cdot (Tp + 1) = kU(p)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k}{Tp + 1}$$

Переходная функция апериодического звена

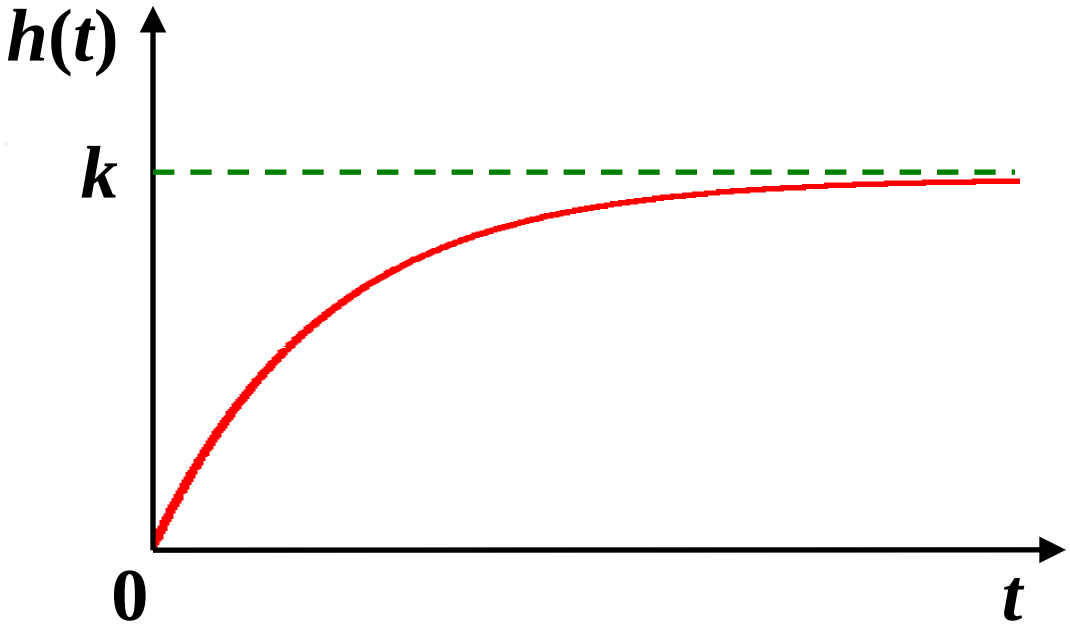
$$H(p)=\frac{W(p)}{p}=\frac{k}{p\cdot(Tp+1)}=\frac{k}{T}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{T}}$$

$$h(t)=\frac{k}{T}\int_0^t 1(t-\tau)\cdot e^{-\frac{\tau}{T}}1(\tau)\,d\tau=\frac{k}{T}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}}d\tau=$$

$$=-ke^{-\frac{\tau}{T}}\Bigg|_0^t=-ke^{-\frac{t}{T}}+ke^{0}=k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

Переходная функция апериодического звена

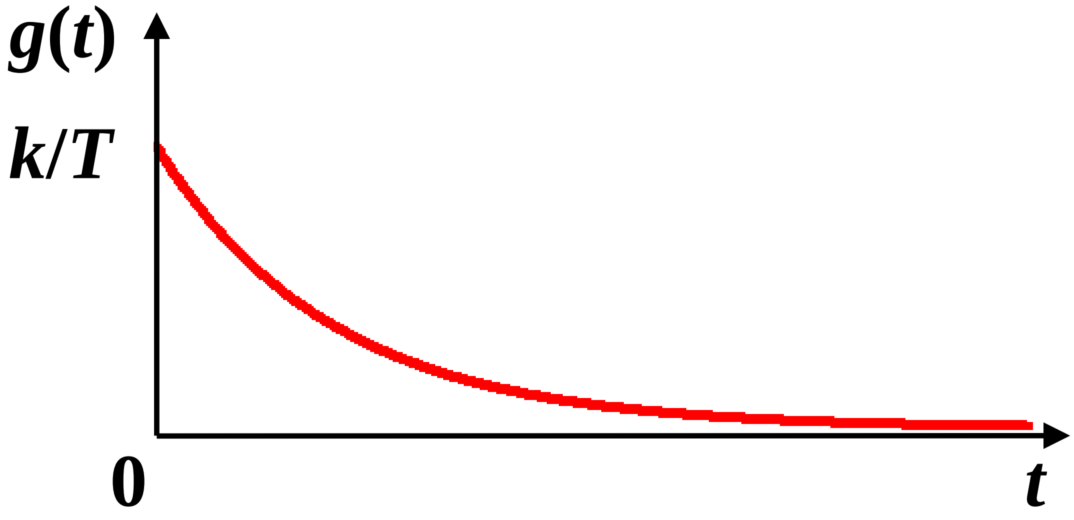
$$h(t) = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$



Импульсная переходная функция апериодического звена

$$G(p) = W(p) = \frac{k}{Tp+1} = \frac{k}{T}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{T}}$$

$$g(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}1(t)$$



Частотные характеристики апериодического звена

$$W(j\omega)=\frac{k}{T\cdot j\omega+1}=\frac{k(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)}$$

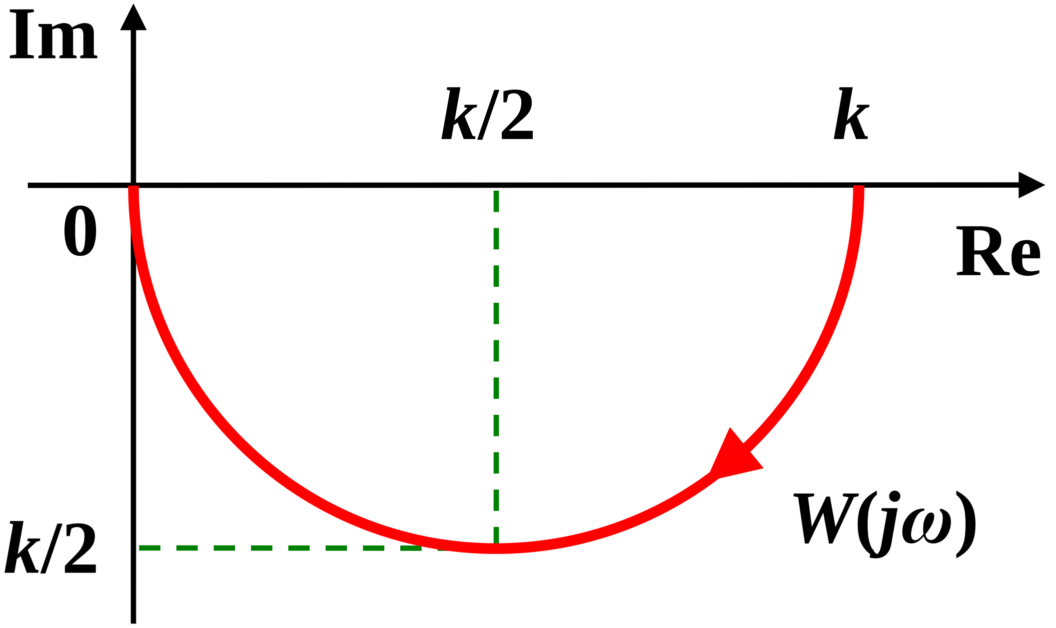
$$W(j\omega)=\frac{k(1-jT\omega)}{1+T^2\omega^2}=\frac{k}{1+T^2\omega^2}-j\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

$$R(\omega)=\frac{k}{1+T^2\omega^2}$$

$$I(\omega)=-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}$$

АФХ апериодического звена

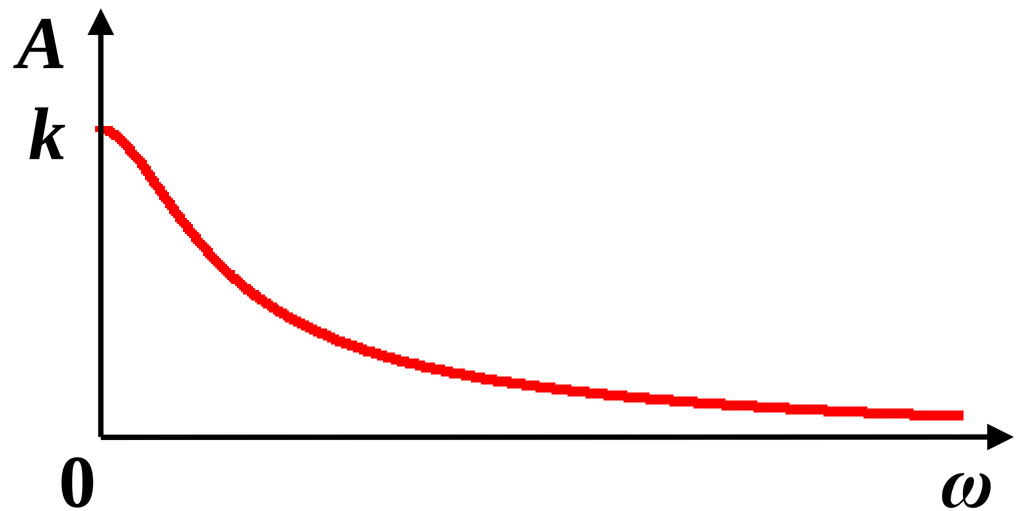
$$W(j\omega) = \frac{k}{1+T^2\omega^2} - j\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}$$



АЧХ апериодического звена

$$A(\omega)=\sqrt{\left(\frac{k}{1+T^2\omega^2}\right)^2+\left(-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)^2}=$$

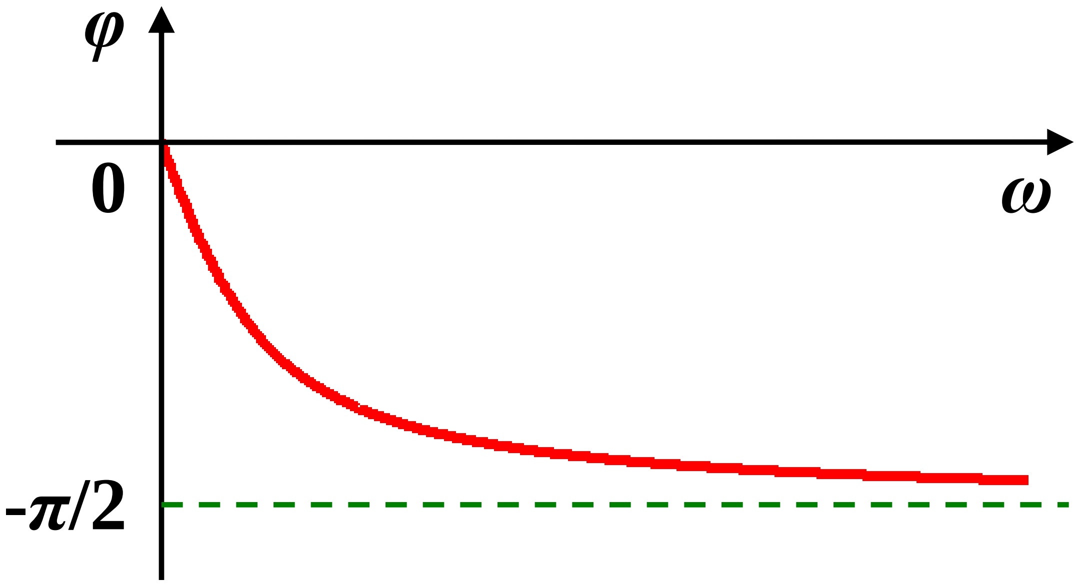
$$=\sqrt{\frac{k^2+k^2T^2\omega^2}{\left(1+T^2\omega^2\right)^2}}=\sqrt{\frac{k^2\left(1+T^2\omega^2\right)}{\left(1+T^2\omega^2\right)^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$



ФЧХ апериодического звена

$$tg\left[\varphi(\omega)\right]=\frac{I(\omega)}{R(\omega)}=\left(-\frac{kT\omega}{1+T^2\omega^2}\right)\frac{1+T^2\omega^2}{k}=-T\omega$$

$$\varphi(\omega)=\mathrm{arctg}\left(-T\omega\right)$$

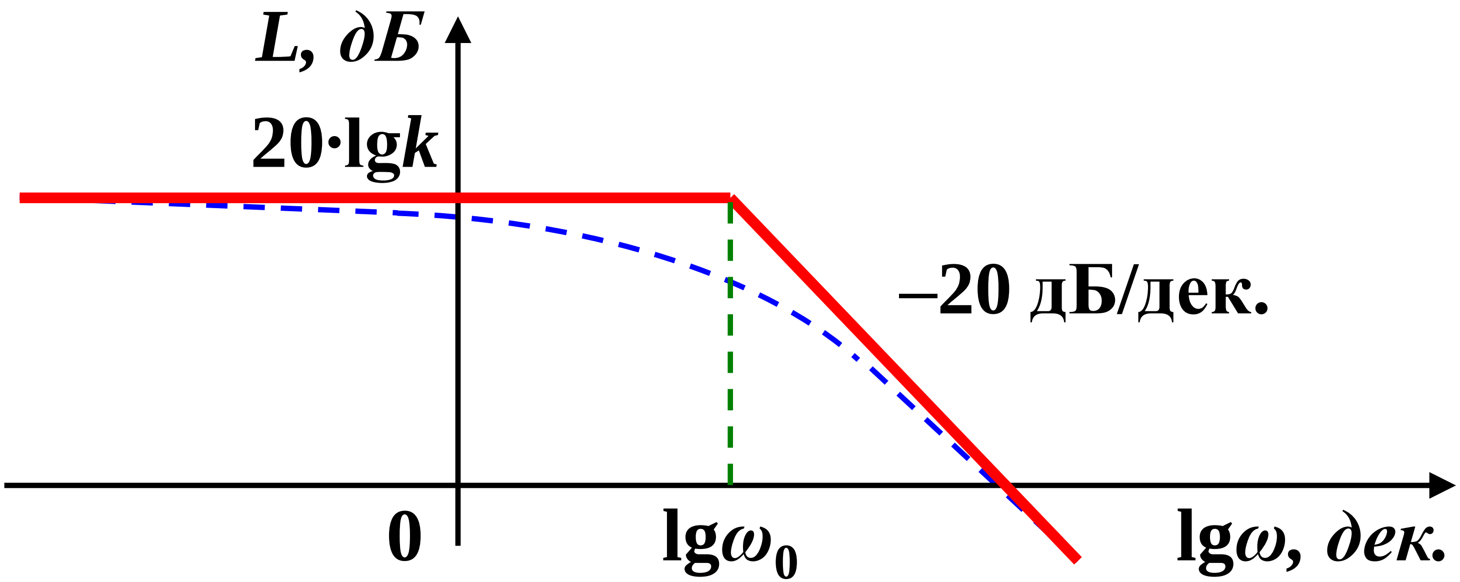


ЛАЧХ апериодического звена

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} = 20\lg k - 10\lg\left(1+T^2\omega^2\right)$$

$$\omega \ll 1/T \quad \Rightarrow \quad L(\omega) \approx 20\lg k$$

$$\omega \gg 1/T \quad \Rightarrow \quad L(\omega) \approx 20\lg k - 20\lg T\omega$$



Звено второго порядка

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = bu \qquad T^2 \ddot{y} + 2dT\,\dot{y} + y = ku$$

$T = \sqrt{1/a_0}$ – постоянная времени

$d = \dfrac{a_1}{2a_0 T}$ – коэффициент демпфирования

$k = b/a_0$ – коэффициент усиления

$$T^2 p^2 Y(p) + 2dTpY(p) + Y(p) = kU(p)$$

$$Y(p)\left[T^2 p^2 + 2dTp + 1\right] = kU(p)$$

$$W(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2dTp + 1}$$

Переходная функция звена второго порядка

$$H(p)=\frac{W(p)}{p}=\frac{k}{p\left(T^2p^2+2dTp+1\right)}$$

$$p_0=0$$

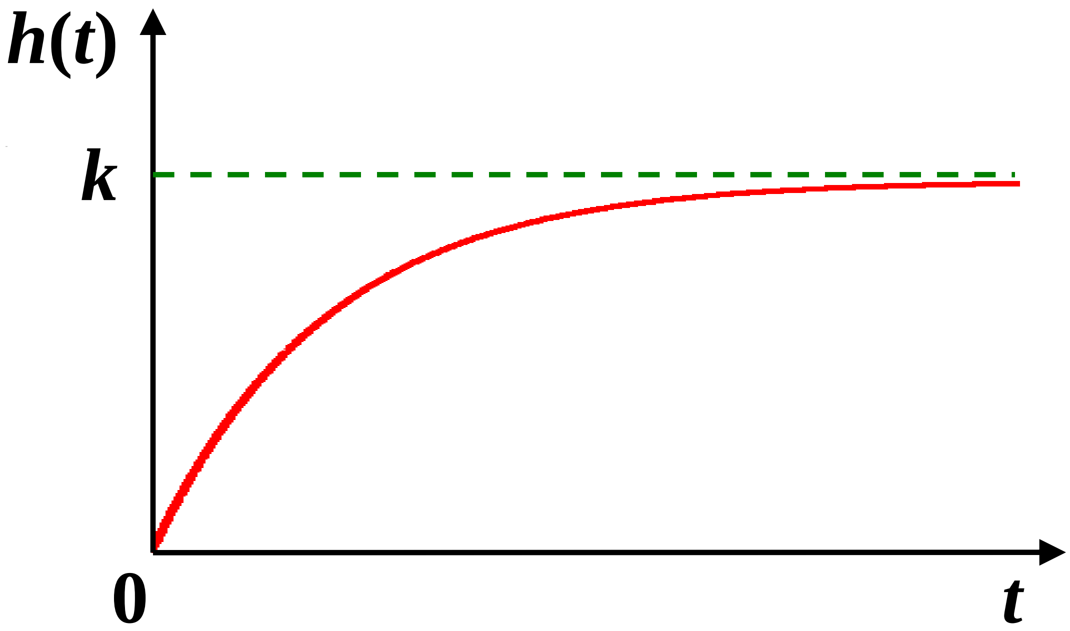
$$p_{1,2}=\frac{-2dT\pm\sqrt{4d^2T^2-4T^2}}{2T^2}=\frac{-d\pm\sqrt{d^2-1}}{T}$$

Переходная функция апериодического звена второго порядка

$d \geq 1 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2}$ – **вещественные отрицательные**

$$\lambda_1 = |p_1| \qquad \lambda_2 = |p_2|$$

$$h(t) = k + c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t}$$

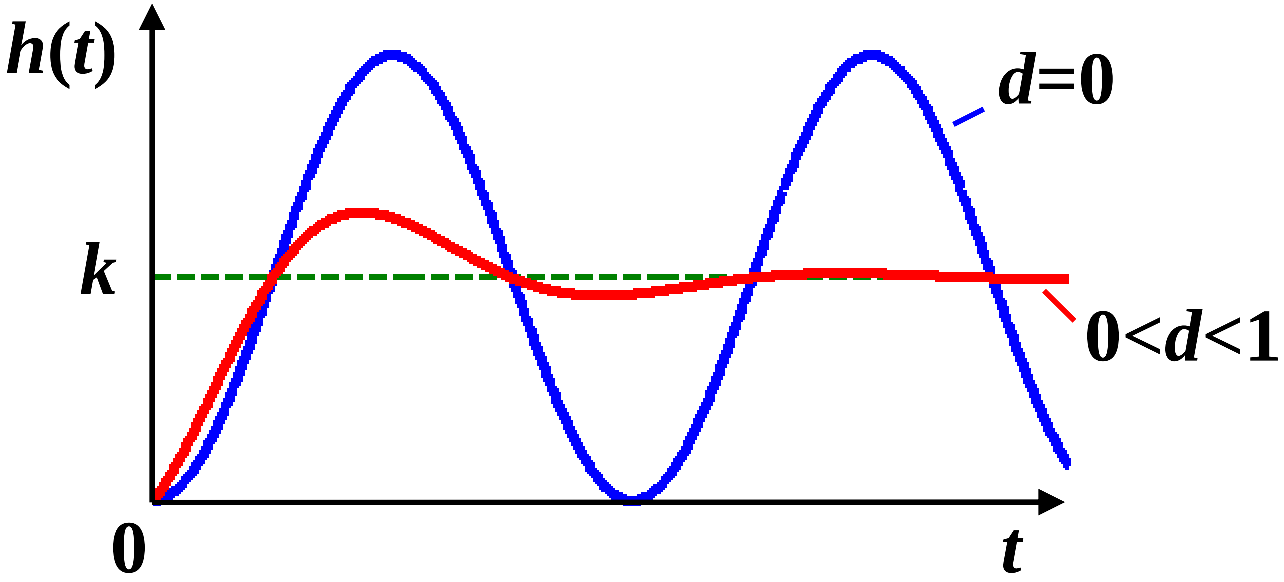


Переходная функция колебательного звена второго порядка

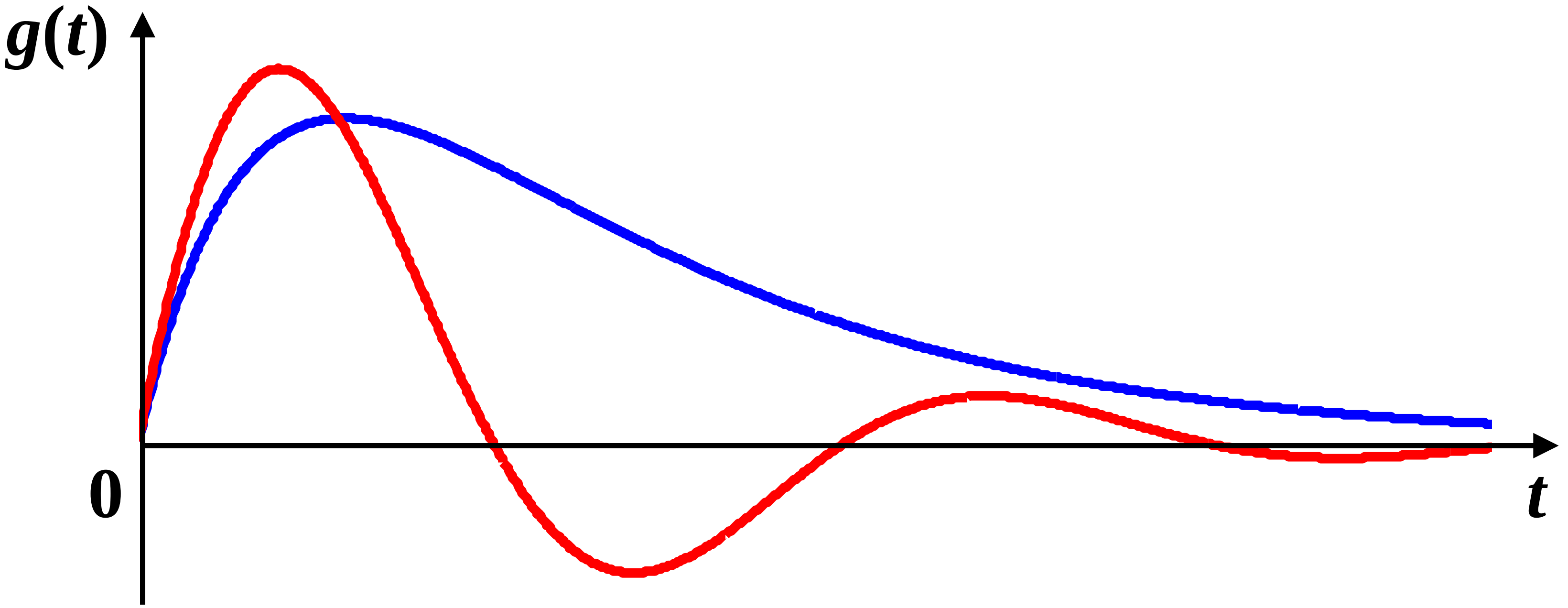
$$0 \le d < 1 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta$$

$$h(t) = k\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t + c\sin\beta t\right)\right]$$

$$d = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad h(t) = k\left[1 - \cos\beta t - c\sin\beta t\right]$$



Импульсная переходная функция звена второго порядка



Частотные характеристики звена второго порядка

$$W(j\omega)=\frac{k}{-T^2\omega^2+j2dT\omega+1}=\frac{k}{\left(1-T^2\omega^2\right)+j2dT\omega}$$

$$W(j\omega)=k\frac{\left(1-T^2\omega^2\right)-j2dT\omega}{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+(2dT\omega)^2}$$

$$R(\omega)=\frac{k\left(1-T^2\omega^2\right)}{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+(2dT\omega)^2}$$

$$I(\omega)=-\frac{2kdT\omega}{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+(2dT\omega)^2}$$

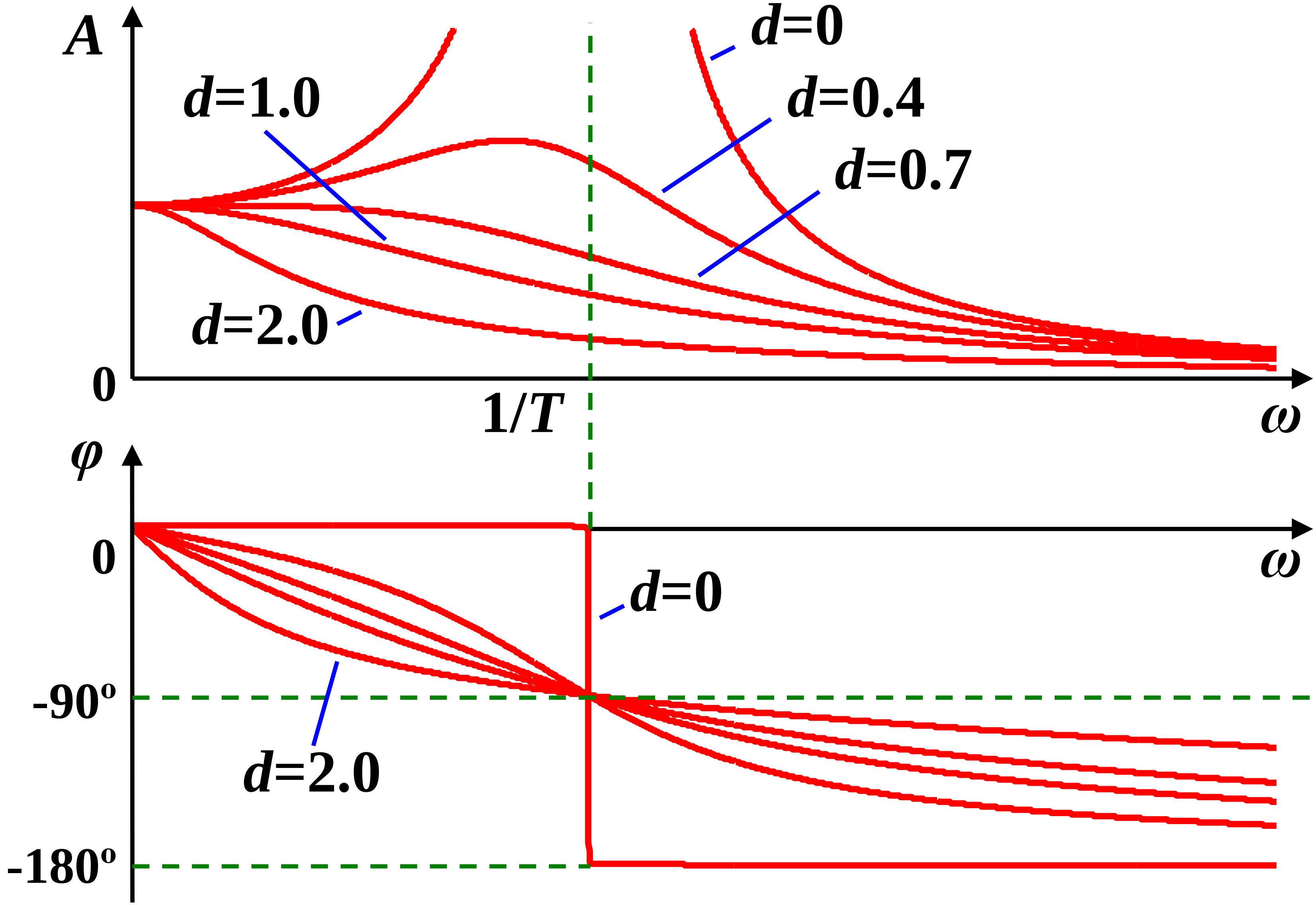
АЧХ и ФЧХ звена второго порядка

$$A(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + I^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + (2dT\omega)^2}}$$

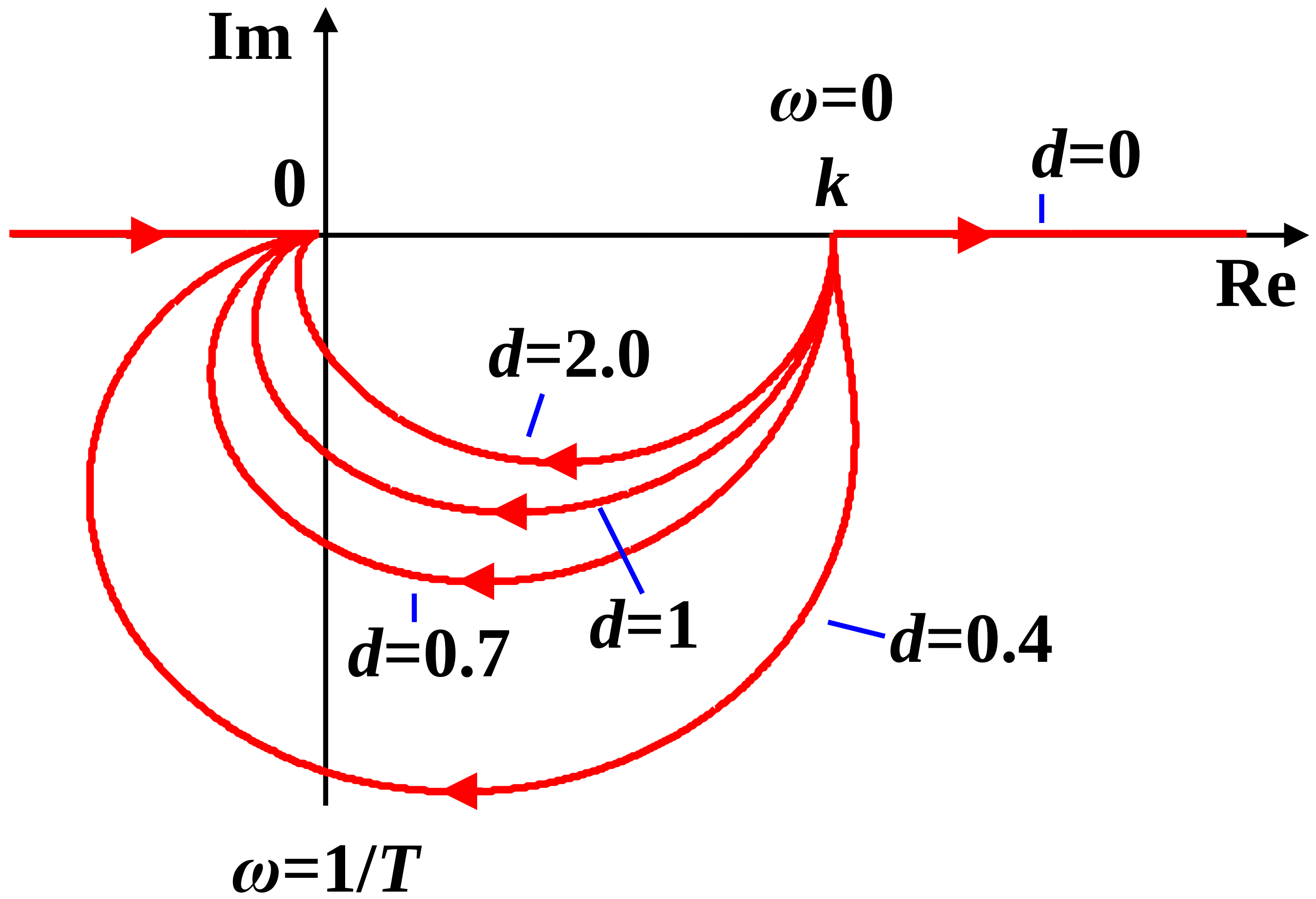
$$tg[\varphi(\omega)] = \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = -\frac{2dT\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

$$A'(\omega) = \frac{2kT^2\omega\left[\left(1 - 2d^2\right) - T^2\omega^2\right]}{\left[\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + (2dT\omega)^2\right]^{3/2}} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\sqrt{1 - 2d^2}}{T}$$

АЧХ и ФЧХ звена второго порядка



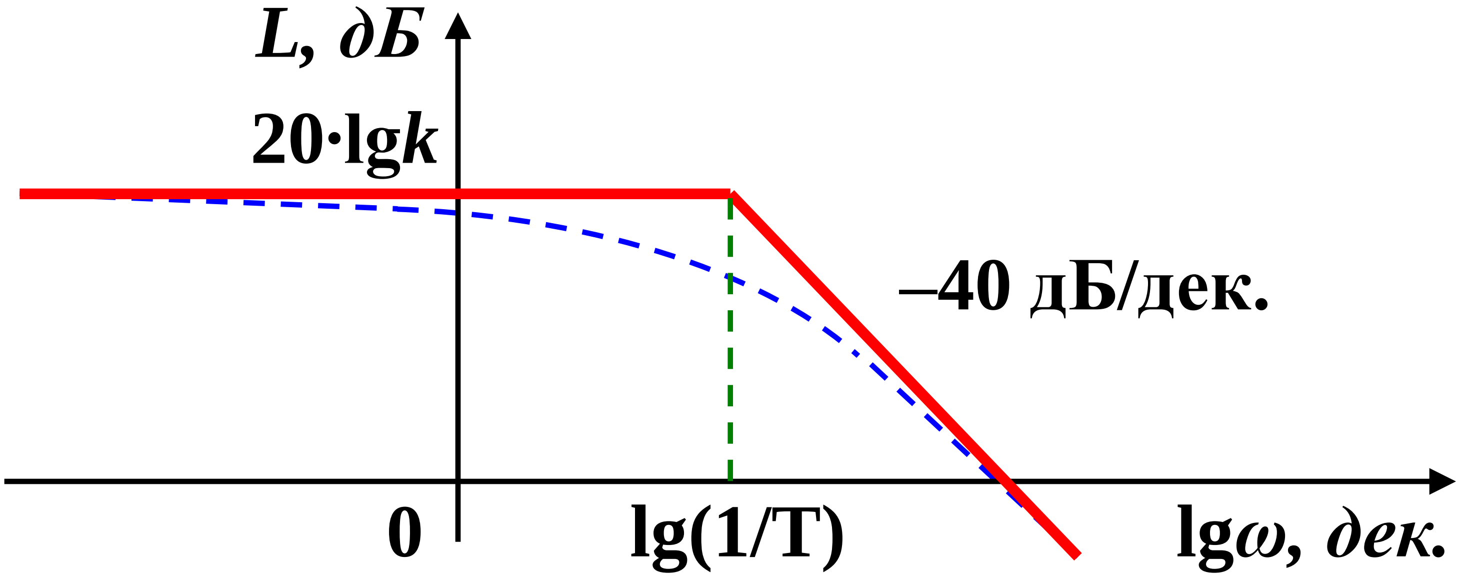
АФХ звена второго порядка



ЛАЧХ звена второго порядка

$$L(\omega) = 20\lg \frac{k}{\sqrt{\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + \left(2dT\omega\right)^2}}$$

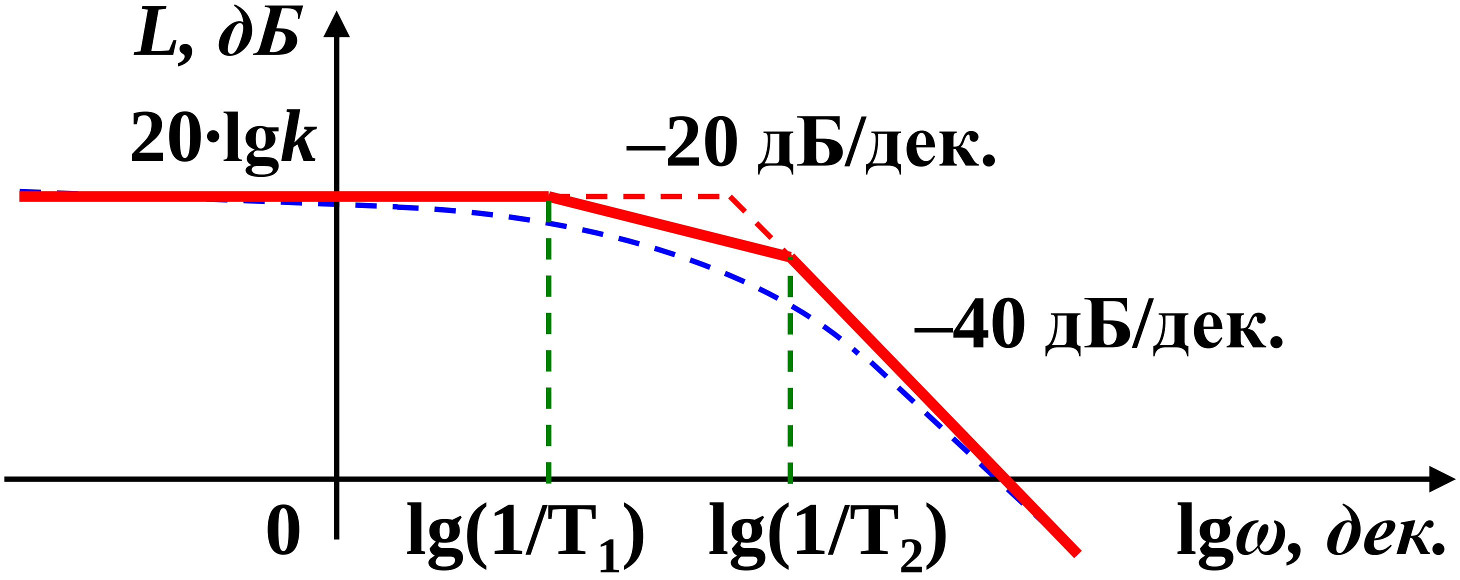
$$L(\omega) = 20\lg k - 10\lg\left[\left(1 - T^2\omega^2\right)^2 + \left(2dT\omega\right)^2\right]$$



ЛАЧХ апериодического звена второго порядка

$$L(\omega) = 20\lg \frac{k}{\sqrt{\left(T_1^2\omega^2 + 1\right)\left(T_2^2\omega^2 + 1\right)}}$$

$$L(\omega) = 20\lg k - 10\lg\left(T_1^2\omega^2 + 1\right) - 10\lg\left(T_2^2\omega^2 + 1\right)$$



Спасибо за внимание!